⧫ Corrigés des exercices du chapitre 15

Exercice 1. Dans une classe, les élèves peuvent étudier, parmi d'autres langues, l'anglais et l'espagnol. On choisit un élève au hasard et on considère les évènements suivants :

A : « l'élève étudie l'anglais »

E : « l'élève étudie l'espagnol »

Pour chacun des évènements suivants, le décrire par une phrase en français :

$$A \cap E \qquad A \cup E \qquad \overline{E} \qquad \overline{A} \cap E \qquad A \cup \overline{E} \qquad \overline{A \cup E}.$$

Solution. On peut décrire les évènements de la façon suivante :

$A \cap E$: « l'élève étudie l'anglais et l'espagnol ».

$A \cup E$: « l'élève étudie au moins un des deux langues ».

$\overline{E}$: « l'élève n'étudie pas l'espagnol ».

$\overline{A} \cap E$: « l'élève étudie l'espagnol mais pas l'anglais »

$A \cup \overline{E}$ « l'élève étudie l'anglais ou n'étudie pas l'espagnol », ce qu'on peut aussi traduire par « si l'élève n'étudie pas l'anglais alors il n'étudie pas l'espagnol » ou par sa contraposée « si l'élève étudie l'espagnol alors il étudie l'anglais ».

$\overline{A \cup E}$: « l'élève n'étudie aucune des deux langues »

Exercice 2. Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la saison estivale. Les résultats de ce sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Le client a voyagé à l'étranger	Le client a voyagé en France	Total
Le client est satisfait		305	
Le client n'est pas satisfait	155		220
Total		370	1 000

1. Compléter le tableau ci-dessus directement sur l'énoncé.
2. On choisit au hasard un client de cette agence.
   - **a.** Quel est univers de l'expérience ?
     Par quelle probabilité va-t-on modéliser l'expérience ?
   - **b.** Quelle est la probabilité de l'évènement A : « le client est satisfait » ?
   - **c.** Quelle est la probabilité de l'évènement B : « le client a voyagé en France » ?
   - **d.** Quelle est la probabilité de l'évènement C : « le client est satisfait et il a voyagé en France » ?
   - **e.** Définir par une phrase l'évènement $\overline{A \cup B}$ puis calculer sa probabilité.
3. On choisit au hasard un client ayant voyagé à l'étranger.
   Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas satisfait ?

Solution.

1.

	Le client a voyagé à l'étranger	Le client a voyagé en France	Total
Le client est satisfait	475	305	780
Le client n'est pas satisfait	155	65	220
Total	630	370	1 000

2. **a.** L'univers est l'ensemble des 1000 clients de l'agence.
On modélise l'expérience par l'équiprobabilité $\mathbf{P}$ sur l'ensemble des 1000 clients de l'agence.

b. Il y a 780 clients satisfaits donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{780}{1000} = \dfrac{39}{50}$.

c. Il y a 370 clients qui ont voyagé en France donc $\mathbf{P}(B) = \dfrac{370}{1000} = \dfrac{37}{100}$.

d. Il y a 305 clients qui sont satisfaits et qui ont voyagé en France donc $\mathbf{P}(C) = \dfrac{305}{1000} = \dfrac{61}{200}$.

e. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: « le client n'est pas satisfait et il a voyagé à l'étranger » donc $\mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = \dfrac{155}{1000} = \dfrac{31}{200}$.

3. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des clients ayant voyagé à l'étranger.
Parmi les clients ayant voyagé à l'étranger, il y en a 155 qui ne sont pas satisfait donc la probabilité que le client ne soit pas satisfait est $\dfrac{155}{630} = \dfrac{31}{126}$.

Exercice 3. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

1. Déterminer la valeur de a.

2. Écrire chacun des évènements suivants sous forme d'un ensemble puis déterminer sa probabilité.

a. A : « Obtenir un chiffre pair »

b. B : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 »

c. C = A ∪ B.

Solution.

1. Comme la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1, on a $\mathbf{P}(1) + \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(3) + \mathbf{P}(4) + \mathbf{P}(5) + \mathbf{P}(6) = 1$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{12} + a + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} = 1$.
On en déduit que $a = 1 - \left(\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12}\right)$ soit $a = \dfrac{1}{6}$.

2. **a.** $A = \{2, 4, 6\}$ donc $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(4) + \mathbf{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$ soit $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$.

   b. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ donc $B = \overline{\{6\}}$ et ainsi $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(6) = 1 - \frac{1}{12}$ soit $\mathbf{P}(B) = \frac{11}{12}$.

   c. $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ donc $\mathbf{P}(C) = 1$.

Exercice 4. On dispose de deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer simultanément ces deux dés et à soustraire le plus petit des deux nombres au plus grand. Par exemple, si on obtient 3 et 5, l'issue est $5 - 3 = 2$. Si on obtient le même nombre sur les deux dés, l'issue est 0.

1. Compléter directement sur l'énoncé le tableau ci-dessous et en déduire l'univers de cette expérience.

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Les issues de l'expérience sont-elles équiprobables ?
3. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   A : « Obtenir 5 »
   B : « Obtenir un nombre pair »
   C : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »
4. Un jeu consiste à deviner quel va être le résultat de cette expérience. Sur quelle valeur doit-on parier pour avoir la plus grande probabilité de gagner ?

Solution.

1.

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

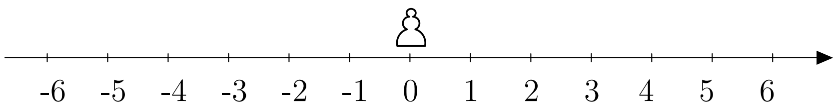
2. Les lancers sont équiprobables donc la probabilité d'une issue est $\frac{m}{36}$ où m est le nombre de lancers qui réalisent cette issue. Comme toutes les issues ne correspondent pas au même nombre de lancers (par exemple, il y a 2 lancers qui donnent 5 mais 6 lancers qui donnent 6), on en déduit que les issues ne sont pas équiprobables.

3. $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

$\mathbf{P}(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
$\mathbf{P}(C) = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$.

4. Le nombre qui apparaît le plus souvent est 1 avec 10 lancers donc c'est celui qui a la plus grande probabilité d'être obtenu. On a donc intérêt à parier sur le nombre 1 pour maximiser la probabilité de gagner.

Exercice 5. On dispose un pion sur un axe gradué. Initialement, le pion se trouve à l'abscisse 0.



On lance plusieurs fois de suite une pièce équilibrée. À chaque fois qu'on obtient *pile*, on déplace le pion d'une unité vers la droite et à chaque fois qu'on obtient *face*, on déplace le pion d'une unité vers la gauche.

Par exemple, si on lance la pièce 3 fois et qu'on obtient *face*, *pile* et *face* alors le pion se trouve successivement à l'abscisse -1 puis 0 puis -1.

1. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 3 fois.

a. Représenter les différentes séries de lancers possibles à l'aide d'un arbre.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 3 lancers.

c. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2 à l'issue des 3 lancers.

2. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 2024 fois.

a. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 2024 lancers.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2024 à l'issue des 2024 lancers.

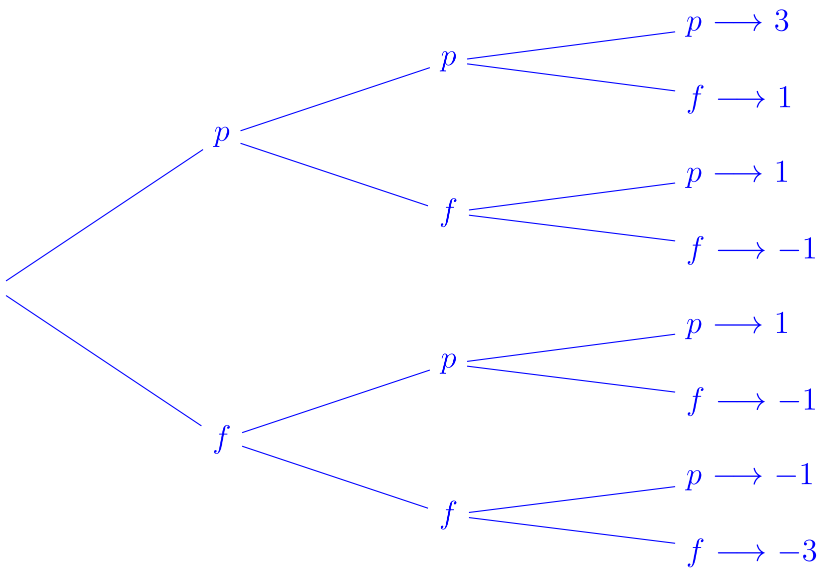
3. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce n fois où $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Combien y a-t-il de séries différentes de n lancers ?

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'absbisse 0 à l'issue des n lancers.

Solution.

1. a. On peut représenter la situation par un arbre en codant p pour *pile* et f pour *face*.



On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des séries de lancers possibles (qui correspondent aux 8 chemins possibles sur l'arbre).

b. Comme il y a 3 chemins qui mènent à l'abscisse 1, la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 3 lancers est $\frac{3}{8}$.

c. Il n'y a aucun chemin qui mène à l'abscisse 2 donc la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2 à l'issue des 3 lancers est 0.

2. Dans cette question, on modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 2^{2024} séries de lancers possibles.

a. Notons n_p le nombre de *pile* obtenu au cours de 2024 lancers. On a alors obtenu $2024 - n_p$ $face$ et la position finale du pion est $n_p - (2024 - n_p) = 2n - 2024$. Comme $2n$ et 2024 sont pairs, l'abscisse finale est également paire. Ainsi, la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 2024 lancers est 0.

b. Il n'y a qu'une seule façon que l'abscisse finale soit 2024, c'est d'obtenir *pile* à chaque lancer. Ainsi, la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2024 à l'issue des 2024 lancers est $\frac{1}{2^{2024}}$.

3. a. On effectue n lancers successifs avec 2 possibilités à chaque lancers donc, par le principe multiplicatif, le nombre de séries différentes de n lancers est 2^n.

b. Le pion est à l'abscisse 0 à l'issue des n lancers si et seulement si on a obtenu autant de *pile* que de *face*. Ceci n'est possible que si n est pair. Dans ce cas, pour déterminer une série de lancers qui conduit à l'abscisse 0, il suffit de choisir la place des $\frac{n}{2}$ lancers qui ont donné *pile* : il y a $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ possibilités. Ainsi, par équiprobabilité sur les 2^n séries de lancers possibles, la probabilité que le jeton soit à l'abscisse 0 après n lancers est 0 si n est impair et $\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}$ si n est pair.

Exercice 6. Un loto est organisé. On tire au hasard, successivement et sans remise des jetons dans une urne qui contient 100 jetons numérotés de 0 à 99.

Pour jouer, on utilise une grille composée de 3 lignes. Sur chaque ligne, il y a 5 numéros et tous les numéros de la grille sont différents.

1. Quelle est la probabilité que le premier numéro tiré figure sur la grille ?

2. On suppose que le premier numéro tiré n'est pas sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure sur la grille ?

3. On suppose que le premier numéro tiré est sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure également sur la grille ?

Solution.

1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 100 nombres de 0 à 99. La probabilité que le premier tiré figure sur la grille $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.

2. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 99 nombres qui n'ont pas encore été tirés. Comme le premier nombre tiré ne figure pas sur la grille, les 15 numéros de la grille font partie de ces 99 nombres donc la probabilité que le second tiré figure sur la grille est $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$.

3. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 99 nombres qui n'ont pas encore été tirés. Comme le premier nombre tiré figure sur la grille, il reste 14 numéros de la grille qui font partie de ces 99 nombres donc la probabilité que le second tiré figure sur la grille est $\frac{14}{99}$.

Exercice 7. Une urne contient 20 boules blanches, 10 boules noires et un certain nombre n de boules rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne et on considère les évènements :

B : « la boule tirée est blanche »
N : « la boule tirée est noire »
R : « la boule tirée est rouge »

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient en tout 50 boules.
  a. Déterminer la valeur de n.
  b. Déterminer les probabilités des évènements B, N et R.

2. Dans cette question, on suppose que le nombre total de boules dans l'urne est inconnu (et donc n est également inconnu).
  a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité de l'évènement R.
  b. Déterminer n de telle façon que $\mathbf{P}(R) = 0{,}75$.
  c. Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbf{P}(R) \geqslant 0{,}99$.
  d. Déterminer la plus grande valeur de n telle la probabilité que la boule tirée ne soit pas rouge soit au moins égale à $\dfrac{3}{4}$.

Solution.

1. a. On a $20 + 10 + n = 50$ donc $n = 50 - 30$ c'est-à-dire $n = 20$.

b. On modélise les tirages au hasard par l'équiprobabilité $\mathbf{P}$ sur l'ensemble des 50 boules. Comme il y a 20 boules blanches, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$, comme il y a 10 boules noires, $\mathbf{P}(N) = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$ et comme il y a 20 boules rouges, $\mathbf{P}(R) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$.

2. a. Le nombre total de boules est $30 + n$. On modélise les tirages au hasard par l'équiprobabilité $\mathbf{P}$ sur l'ensemble des $n + 30$ boules. Comme il y a n boules rouges, $\mathbf{P}(R) = \dfrac{n}{30 + n}$.

b. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R) = 0{,}75 &\iff \frac{n}{30+n} = \frac{3}{4} \iff 4n = 3(30+n)\\ &\iff 4n = 90 + 3n \iff n = 90\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{P}(R) = 0{,}75$ si et seulement si $n = 90$.

c. Comme $n + 30 > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R) \geqslant 0{,}99 &\iff \frac{n}{n+30} \geqslant 0{,}99 \iff n \geqslant 0{,}99(n+30)\\ &\iff n \geqslant 0{,}99n + 29{,}7 \iff 0{,}01n \geqslant 29{,}7\end{aligned}$$

et, comme $0{,}01 > 0$, $0{,}01n \geqslant 29{,}7$ équivaut à $n \geqslant \dfrac{29{,}7}{0{,}01}$ c'est-à-dire $n \geqslant 2970$.

Ainsi, le plus petit entier n tel que $P(R) \geqslant 0{,}99$ est 2970.

d. On a $\mathbf{P}(\overline{R}) = 1 - \mathbf{P}(R) = \dfrac{30}{n+30}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\overline{R}) \geqslant \frac{3}{4} &\iff \frac{30}{n+30} \geqslant \frac{3}{4} \iff 30 \times 4 \geqslant 3(n+30) \iff 120 \geqslant 3n + 90\\ &\iff 30 \geqslant 3n \iff n \leqslant 10\end{aligned}$$

donc la plus grande valeur de n telle la probabilité que la boule tirée ne soit pas rouge soit au moins égale à $\dfrac{3}{4}$ est 10.

Exercice 8. Dans une population, les individus peuvent posséder (ou non) un caractère génétique a ou un caractère génétique b (ou les deux caractères). La probabilité, pour un individu choisi au hasard, de posséder le caractère a est 0,8, la probabilité de posséder le caractère b est 0,6 et la probabilité de posséder les deux caractères est 0,45.

On choisit un individu au hasard dans la population et on considère les évènements :

A : « l'individu possède la caractère a » B : « l'individu possède le caractère b »

1. Donner les probabilités des évènements A, B et A ∩ B et en déduire la probabilité A ∪ B.
2. On considère l'évènement C : « l'individu ne possède aucun des deux caractères ». Exprimer C à l'aide de A et B et en déduire la probabilité de C.

Solution.

1. D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 0{,}8$, $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 0{,}6$ et, comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est l'événement : « l'individu possède les deux caractères », $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}45$. Par théorème,
$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) + \mathbf{P}(\mathrm{B}) - \mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}45$$
soit $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}95$.
2. L'événement C est l'évènement contraire de l'évènement « l'individu possède au moins l'un des deux caractères » c'est-à-dire $\mathrm{C} = \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$. On en déduit que $\mathbf{P}(\mathrm{C}) = 1 - \mathbf{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - 0{,}95$ soit $\mathbf{P}(\mathrm{C}) = 0{,}05$.

Exercice 9. Un octet est une suite de 8 chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01000110 est un octet. On choisit un octet au hasard. Quelle est la probabilité qu'il contienne au moins un 0 et un 1 ?

Solution. Un octet s'obtient en choisissant un chiffre 0 ou 1 pour chacune des 8 places. Il y a donc $2^8 = 256$ octets différents.

On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 256 octets.

Notons A l'évènement « l'octet contient au moins un 0 et un 1 ». Alors, $\overline{A} = \{00000000\,;11111111\}$.
Ainsi, $\mathbf{P}(\overline{A}) = \dfrac{2}{256} = \dfrac{1}{128}$ donc $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{128}$ c'est-à-dire $P(A) = \dfrac{127}{128}$.

Exercice 10. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Les boules 1 à 4 sont vertes et les autres sont jaunes. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Quel est le cardinal de l'univers ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient jaunes ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins une des boules tirées soit jaune ?
4. Quelle est la probabilité de tirer 1 boule verte et 2 boules jaunes ?

Solution.

1. L'univers est constitué des parties à 3 éléments choisis parmi les 12 boules de l'urne donc le cardinal de l'univers est $\dbinom{12}{3} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 2 \times 11 \times 10 = 220$.
2. Il y a $12 - 4 = 8$ boules jaunes donc il y a $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 8 \times 7 = 56$ tirages qui ne donnent 3 boules jaunes donc, par équiprobabilité des tirages, la probabilité que toutes les boules tirées soient jaunes est $\dfrac{56}{200} = \dfrac{14}{55}$.

3. Notons A l'évènement « au moins une des boules tirées est jaune ». Alors, $\overline{A}$ est l'évènement « toutes les boules tirées sont vertes ». Par le même raisonnement que dans la question précédente, $\mathbf{P}(\overline{A}) = \dfrac{\binom{4}{3}}{220} = \dfrac{4}{220} = \dfrac{1}{55}$ donc $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = \dfrac{54}{55}$.

4. Par le principe multiplicatif, il y a $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix} = 4 \times \dfrac{8 \times 7}{2} = 112$ tirages qui donnent 1 boule verte et 2 boules jaunes dont la probabilité de tirée 1 boule verte et 2 boules jaunes est $\dfrac{112}{220} = \dfrac{28}{55}$.

Exercice 11. Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements B et $A \cap B$ sont données par les égalités :

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

1. Calculer $\mathbf{P}_B(A)$.
2. La probabilité de B sachant A est $\dfrac{2}{3}$. En déduire la probabilité de A.
3. Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

Solution.

1. $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$ soit $P_B(A) = \dfrac{8}{15}$.
2. Étant donné que $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B)$, on a $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}_A(B)} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}$ soit $\mathbf{P}(A) = \dfrac{3}{5}$.
3. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{5}$ soit $\mathbf{P}(A \cup B) = \dfrac{19}{20}$.

Exercice 12. On considère deux évènements A et B liés à une même expérience aléatoire modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$. On donne

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{3}{16}.$$

Déterminer les probabilités suivantes.

a) $\mathbf{P}(\overline{A})$ b) $\mathbf{P}(A \cup B)$ c) $\mathbf{P}_A(B)$ d) $\mathbf{P}_B(A)$ e) $\mathbf{P}_A(\overline{B})$ f) $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Solution.

a) $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - \dfrac{1}{3}$ soit $\mathbf{P}(\overline{A}) = \dfrac{2}{3}$.

b) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{16}$ soit $\mathbf{P}(A \cup B) = \dfrac{19}{48}$.

c) $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}}$ soit $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{9}{16}$.

d) $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}}$ soit $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{3}{4}$.

e) $\mathbf{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}_A(B) = 1 - \dfrac{9}{16}$ soit $\mathbf{P}_A(\overline{B}) = \dfrac{7}{16}$.

f) $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B})}{\mathbf{P}(\overline{A})}$. Or, comme $\overline{A} \cap \overline{B}$ est l'événement contraire de $A \cup B$ donc $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \dfrac{19}{48} = \dfrac{29}{48}$. Ainsi, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{\frac{29}{48}}{\frac{2}{3}}$ soit $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{29}{32}$.

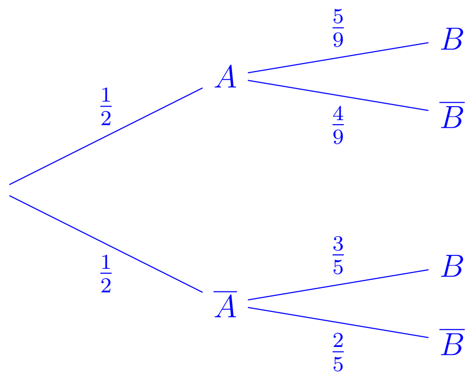
Exercice 13. Un sac S_1 contient 9 boules dont 5 sont rouges et un sac S_2 contient 5 boules dont 3 sont rouges. On choisit un sac au hasard et on tire une boule au hasard dans ce sac.

On note A : « Choisir le sac S_1 » et B : « Tirer une boule rouge ».

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne du sac S_1 ?
3. Quelle la probabilité que la boule tirée soit rouge ?
4. Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne du sac S_1 ?

Solution.

1. On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant.



2. La probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne du sac S_1 est $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{9}$ soit $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{5}{18}$.
3. Les évènements A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales, la probabilité de tirer une boule rouge est
$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$$
soit $\mathbf{P}(B) = \dfrac{26}{45}$.
4. La probabilité de tirer une boule qui provient de S_1 sachant que cette boule est rouge est $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{26}{45}}$ soit $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{25}{52}$.

Exercice 14. Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?
2. **a.** Si on a obtenu une boule blanche au premier tirage, quelle est probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième ?

   b. Si on a obtenu une boule noire au premier tirage, quelle est probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième ?

   c. En déduire la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
3. Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première l'ait été ?
4. Si on tire 5 boules (toujours sans remise), quelle est la probabilité que toutes les boules soient blanches ?

Solution.

1. Par équiprobabilité des tirages, la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage est $\dfrac{7}{10}$.
2. **a.** De même, la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage sachant qu'on a tiré une boule blanche au premier est $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

   b. De la même façon, la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage sachant qu'on a tiré une boule noire au premier est $\dfrac{7}{9}$.

   c. Si on note B_1 : « Tirer une boule blanche au premier tirage » et B_2 : « Tirer une boule blanche au second tirage » alors $(B_1, \overline{B_1})$ est un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B_2) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}_{B_1}(B_2) + \mathbf{P}(\overline{B_1})\mathbf{P}_{\overline{B_1}}(B_2).$$

   On déduit alors des questions précédentes que

$$\mathbf{P}(B_2) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{30}$$

   soit $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{7}{10}$.

3. D'après le théorème de Bayes, $\mathbf{P}(B_1 \mid B_2) = \dfrac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1)}{\mathbf{P}(B_2)} = \dfrac{\frac{7}{10} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{2}{3}$.
4. Notons, pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$, B_k : « On tire une boule blanche au k-ième tirage ».
   Par la formule des probabilités composées, la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches est

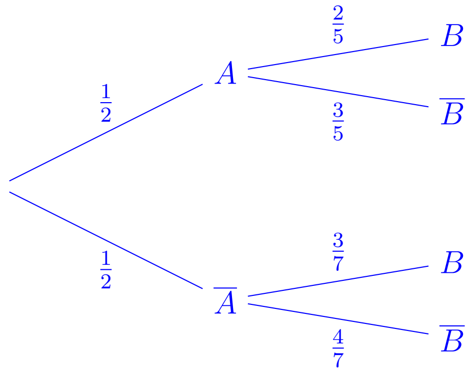
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{5} B_i\right) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1)\mathbf{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2)\mathbf{P}(B_4 \mid B_1 \cap B_2 \cap B_3)\mathbf{P}(B_5 \mid B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Exercice 15. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. On sait que l'urne U_1 contient exactement 5 boules dont 2 blanches et 3 rouges et l'urne U_2 contient exactement 7 boules dont 3 blanches et 4 rouges. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans cette urne.
On note A l'évènement « Choisir l'urne U_1 » et B l'évènement « Tirer un boule blanche ».

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la boule tirée soit une boule blanche et qu'elle provienne de l'urne U_1.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
4. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

Solution.

1. On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant.



2. La probabilité que la boule tirée soit une boule blanche de l'urne U_1 est $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5}$ soit $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$.

3. Les évènements A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales, la probabilité de tirer une boule blanche est

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$$

soit $\mathbf{P}(B) = \dfrac{29}{70}$.

4. La probabilité de tirer une boule qui provient de U_1 sachant que cette boule est blanche est $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{29}{70}}$ soit $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{14}{29}$.

Exercice 16. Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements A, B et $A \cap B$ sont données par les égalités : $\mathbf{P}(A) = \dfrac{5}{3}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{3}{4}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{5}$.

1. L'une des données ci-dessus est aberrante. Laquelle et pourquoi ?

2. Modifier cette donnée de telle façon que les évènements A et B soient indépendants.

3. Que vaut alors $\mathbf{P}_A(B)$?

Solution.

1. La donnée aberrante est $\mathbf{P}(A)$ car la probabilité d'un évènement est toujours comprise entre 0 et 1.

2. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)P(B) \iff \mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \iff \mathbf{P}(A) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} \iff \mathbf{P}(A) = \frac{8}{15}$$

Ainsi, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A) = \dfrac{8}{15}$.

3. Comme A et B sont indépendants, on a $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$ i.e. $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 17. On considère deux évènements A et B liés à une même expérience aléatoire modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$. On sait que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}$. Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants.

1. A et B sont incompatibles. **2.** A et B sont indépendants. **3.** B est une partie de A.

Solution.

1. Si A et B sont incompatibles alors $A \cap B = \varnothing$ donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ i.e. $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{7}{12}$.

2. Si A et B sont indépendants alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ i.e. $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

3. Si B est une partie de A alors $A \cup B = A$ donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A)$ i.e. $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$.

Exercice 18. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules blanches. On y effectue 4 tirages avec remise. Pour chaque entier $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on définit les évènements suivants :

- R_k : « on tire une boule rouge au lancer numéro k »
- B_k : « on tire une boule blanche au lancer numéro k »

Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. E : « N'obtenir que des boules rouges ».

2. F : « Obtenir au moins une boule blanche ».

3. G : « Obtenir exactement une boule blanche ».

Solution.

1. Comme il s'agit de tirages avec remise, les évènements R_k sont mutuellement indépendants. Or, $E = \bigcap_{i=1}^{k} R_k$ donc, par indépendance, $\mathbf{P}(E) = P(R_1)P(R_2)P(R_3)P(R_4) = \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \frac{81}{4096}$.

2. L'évènement $\overline{F}$ est « N'obtenir que des boules rouges » c'est-à-dire $\overline{F} = E$. Ainsi, $\mathbf{P}(F) = 1 - \mathbf{P}(E) = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \frac{4015}{4096}$.

3. On peut écrire

$$G = (B_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4) \cup (R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap R_4) \cup (R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap B_4)$$

Or cette union est disjointe et, par indépendance, chaque évènement de cette union a une probabilité égale à $\frac{3}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$ donc $\mathbf{P}(G) = 4 \times \frac{3}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{375}{1024}$.

Exercice 19. On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k.

Ce dé a été pipé de telle sorte que $p_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier $k \in [\![1, 6]\!]$.

1. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
- C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Même question avec A et C ?

2. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé. S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 et, sinon, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche. On note G cet évènement.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement G.

c. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

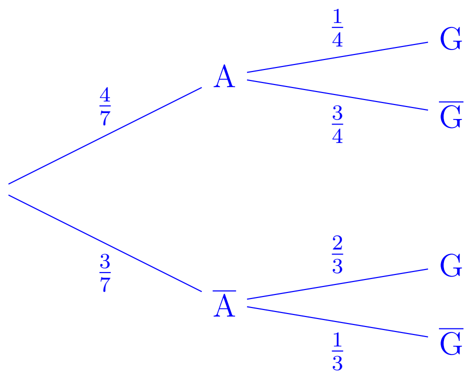
Solution.

1. a. Sachant que $A = \{2, 4, 6\}$, $\mathbf{P}(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21}$ i.e. $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{7}$. De même, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ donc $\mathbf{P}(B) = \frac{3+4+5+6}{21}$ soit $\mathbf{P}(B) = \frac{6}{7}$ et $C = \{3, 4\}$ donc $\mathbf{P}(C) = \frac{3+4}{21}$ i.e. $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{3}$.

b. La probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair est $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}$. Or, $B \cap A = \{4, 6\}$ donc $\mathbf{P}(B \cap A) = \frac{4+6}{21} = \frac{10}{21}$. Ainsi, $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{10}{21} \times \frac{7}{4}$ soit $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{5}{6}$.

c. Étant donné que $\mathbf{P}(B \mid A) \neq \mathbf{P}(B)$, les évènements A et B ne sont pas indépendants. Par ailleurs, $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$ et $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(4) = \frac{4}{21}$ donc $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A \cap C)$ et ainsi les évènements A et C sont indépendants.

2. a. On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant.



b. Les évènements A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements donc, d'après la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(G \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(G \mid \overline{A})$ i.e. $\mathbf{P}(G) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{3}$ soit $\mathbf{P}(G) = \frac{3}{7}$.

c. D'après le théorème de Bayes, la probabilité que le joueur ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé sachant qu'il est gagnant est $\mathbf{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{G}) = \dfrac{\mathbf{P}(\mathrm{A})\mathbf{P}(\mathrm{G} \mid \mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{G})} = \dfrac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{7}}$ soit $\mathbf{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{G}) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 20. Dans une population, on étudie un caractère génétique C. Le caractère C dépend de deux gènes (et deux seulement) g_1 et g_2. Chaque gène peut-être *normal* ou *muté*. Si au moins un des deux gènes g_1 ou g_2 est normal alors le caractère C est normal. Si les deux gènes sont mutés alors le caractère C est anormal. On sait que, dans la population, 5% des personnes ont un gène g_1 muté et 1% des personnes ont un gène g_2 muté. On suppose de plus que le fait d'être normal ou muté pour un gène est indépendant de l'état de l'autre gène.

Déterminer la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population présente un caractère C normal. (On prendre soin de bien rédiger sa réponse en introduisant notamment les évènements nécessaires à la rédaction.)

Solution. Considérons les évènements A : « l'individu possède un gène g_1 normal » et B : « l'individu possède un gène g_2 normal ». On cherche la probabilité que l'individu possède au moins un gène normal i.e. $\mathbf{P}(A \cup B)$. Or, on fait l'hypothèse que les évènements A et B sont indépendants donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(A) = 0{,}99$ et $\mathbf{P}(B) = 0{,}95$ donc $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}99 + 0{,}95 - 0{,}99 \times 0{,}95$ soit $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}9995$. Ainsi, la probabilité qu'un individu choisit au hasard ait un caractère C normal est 0,9995.

Exercice 21. Un couple a deux enfants. On suppose que les sexes des enfants sont indépendants et équiprobables et on considère les évènements :

- F_1 : « le premier enfant est une fille »
- F_2 : « le deuxième enfant est une fille ».

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

2. Sachant que l'aîné des deux enfants est une fille, quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

3. Sachant que l'un des deux enfants est une fille, quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Solution.

1. Comme on suppose les évènements F_1 et F_2 indépendants, la probabilité que les deux enfants soient des filles est $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)$. Or, on suppose que les sexes sont équiprobables donc $\mathbf{P}(F_1) = \mathbf{P}(F_2) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

2. On cherche $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \mid F_1) = \dfrac{\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_1)}{\mathbf{P}(F_1)}$. Or, $F_1 \cap F_2 \cap F_1 = F_1 \cap F_2$ donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \mid F_1) = \frac{\mathbf{P}(F_1 \cap F_2)}{\mathbf{P}(F_1)} = \frac{\mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)}{\mathbf{P}(F_1)} = \mathbf{P}(F_2) = \frac{1}{2}.$$

3. On cherche $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \mid F_1 \cup F_2) = \dfrac{\mathbf{P}((F_1 \cap F_2) \cap (F_1 \cup F_2))}{\mathbf{P}(F_1 \cup F_2)}$. Or, $(F_1 \cap F_2) \cap (F_1 \cup F_2) = F_1 \cap F_2$ car $F_1 \cap F_2 \subset F_1 \cup F_2$. De plus,

$$\mathbf{P}(F_1 \cup F_2) = \mathbf{P}(F_1) + \mathbf{P}(F_2) - \mathbf{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

donc

$$\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \mid F_1 \cup F_2) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 22. Une urne contient 2 boules noires, 3 boules blanches et 1 boule jaune. On dispose d'une cagnotte initiale de 0 euro et on effectue des tirages avec remise dans l'urne. À chaque tirage,

— si on tire une boule jaune, on ajoute un euro à la cagnotte ;
— si on tire une boule blanche, on garde la même cagnotte ;
— si on tire une boule noire, l'argent de la cagnotte est perdu et elle revient à 0 euro.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'évènement N_k (resp. B_k, resp. J_k) qui est réalisé lorsqu'on tire une boule noire (resp. blanche, resp. jaune) au k-ième tirage. On considère également l'évènement Z_k : « à l'issue du k-ième tirage, la cagnotte est de 0 euros ».

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(N_k)$, $\mathbf{P}(B_k)$ et $\mathbf{P}(J_k)$.

2. Calculer $\mathbf{P}(Z_1)$.

3. **a.** Déterminer les valeurs de $\mathbf{P}_{N_2}(Z_2)$ et $\mathbf{P}_{J_2}(Z_2)$.

b. Montrer que $\mathbf{P}_{B_2}(Z_2) = \mathbf{P}_{B_2}(Z_1)$ et en déduire la valeur de $\mathbf{P}_{B_2}(Z_2)$.

c. Calculer $\mathbf{P}(Z_2)$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le système complet d'évènements $(N_{k+1}, B_{k+1}, J_{k+1})$ et en procédant comme à la question précédente, démontrer que :

$$\mathbf{P}(Z_{k+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Z_k) + \frac{1}{3}.$$

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \mathbf{P}(Z_k) - \frac{2}{3}$.

a. Démontrer que (u_k) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1.

b. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_k, puis de $\mathbf{P}(Z_k)$, en fonction de k.

Solution.

1. Comme il y a équiprobabilité des tirages et qu'il y a remise, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(N_k) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(B_k) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(J_k) = \frac{1}{6}$.

2. $Z_1 = N_1 \cup B_1$ et cette union est disjointe donc $\mathbf{P}(Z_1) = \mathbf{P}(N_1) + \mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

3. **a.** Si on a tire une boule noire au deuxième tirage, la cagnotte revient à 0 donc $\mathbf{P}_{N_2}(Z_2) = 1$. Si on tire une boule jaune au deuxième tirage, on ajoute 1 euro à la cagnotte donc celle-ci contient au moins 1 euro et donc $\mathbf{P}_{J_2}(Z_2) = 0$.

b. L'évènement $(B_2 \cap Z_2)$ est réalisé si et seulement si la cagnotte est vide avant le deuxième tirage et on tire une boule blanche au deuxième tirage donc $(B_2 \cap Z_2) = (B_2 \cap Z_1)$. On en déduit que $\mathbf{P}(B_2 \cap Z_2) = \mathrm{P}(B_2 \cap Z_1)$ donc, en divisant par $\mathbf{P}(Z_2)$, on conclut que $\mathbf{P}_{B_2}(Z_2) = \mathbf{P}_{B_2}(Z_1)$. Or, le montant de la cagnotte après le premier tirage est indépendant du résultat du second tirage donc $\mathbf{P}_{B_2}(Z_1) = \mathbf{P}(Z_1) = \frac{5}{6}$ donc $\mathbf{P}_{B_2}(Z_2) = \frac{5}{6}$.

c. Comme (N_2, B_2, J_2) est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_2) &= \mathbf{P}(N_2)\mathbf{P}_{N_2}(Z_2) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}_{B_2}(Z_2) + \mathbf{P}(J_2)\mathbf{P}_{J_2}(Z_2)\\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

4. En raisonnant comme précédemment, $\mathbf{P}_{N_{k+1}}(Z_{k+1}) = 1$, $\mathbf{P}_{J_{k+1}}(Z_{k+1}) = 0$ et on a l'égalité $(B_{k+1} \cap Z_{k+1}) = (B_{k+1} \cap Z_k)$ donc $\mathbf{P}_{B_{k+1}}(Z_{k+1}) = \mathbf{P}_{B_{k+1}}(Z_k) = \mathbf{P}(Z_k)$ car Z_k est indépendant de B_{k+1}. Ainsi, comme $(N_{k+1}, B_{k+1}, J_{k+1})$ est un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_{k+1}) &= \mathbf{P}(N_{k+1})\mathbf{P}_{N_{k+1}}(Z_{k+1}) + \mathbf{P}(B_{k+1})\mathbf{P}_{B_2}(Z_{k+1}) + \mathbf{P}(J_{k+1})\mathbf{P}_{J_{k+1}}(Z_{k+1})\\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \mathbf{P}(Z_k) + \frac{1}{6} \times 0\end{aligned}$$

donc $\mathbf{P}(Z_{k+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbf{P}(Z_k) + \dfrac{1}{3}$.

5. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{k+1} = \mathbf{P}(Z_{k+1}) - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Z_k) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Z_k) - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{P}(Z_k) - \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2}u_k$$

donc (u_k) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = \dfrac{5}{6} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$.

b. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{2 \times 6^{k-1}}$ et donc, comme $\mathbf{P}(Z_k) = u_k + \dfrac{2}{3}$, $\mathbf{P}(Z_k) = \dfrac{1}{2 \times 6^{k-1}} + \dfrac{2}{3}$.

Exercice 23. Une maladie rare touche une personne sur un million. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie qui est positif chez 99,9 % des malades mais aussi chez 1 % des personnes qui ne sont pas malades. On choisit un individu au hasard, on lui fait subir le test et on considère les évènements T : « le test est positif » et M : « l'individu est malade ».

1. Donner les valeurs de $\mathbf{P}(M), \mathbf{P}(T \mid M)$ et $\mathbf{P}(T \mid \overline{M})$.
2. Calculer la probabilité que le test soit positif.
3. Si le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Solution.

1. D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(M) = \dfrac{1}{10^6}$, $\mathbf{P}(T \mid M) = \dfrac{999}{1000}$ et $\mathbf{P}(T \mid \overline{M}) = \dfrac{1}{100}$.
2. Comme $(M, \overline{M})$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(M)\mathbf{P}(T \mid M) + \mathbf{P}(\overline{M})\mathbf{P}(T \mid \overline{M}) &= \frac{1}{10^6} \times \frac{999}{1000} + \left(1 - \frac{1}{10^6}\right) \times \frac{1}{100}\\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{10^6}\left(\frac{999}{1000} - \frac{1}{100}\right) = \frac{10^4}{10^6} + \frac{1}{10^6} \times \frac{989}{1000} = \frac{10\,000\,989}{10^9}\end{aligned}$$

3. D'après le théorème de Bayes,

$$\mathbf{P}(M \mid T) = \frac{\mathbf{P}(M)\mathbf{P}(T \mid M)}{\mathbf{P}(T)} = \frac{\frac{1}{10^6} \times \frac{999}{1000}}{\frac{10\,000\,989}{10^9}} = \frac{999}{10\,000\,989} = \frac{1}{10\,011}.$$

Ainsi, si le test est positif, la probabilité que la personne soit effectivement malade n'est que d'environ 0,1%.

Exercice 24. Chaque individu d'une espèce animale a au cours de sa vie 0, 1 ou 2 enfants, avec les probabilités respectives $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{6}$. On suppose que les nombres d'enfants des différents individus sont indépendants.

1. Si un individu a 1 enfant, calculer la probabilité qu'il n'ait pas de petits-enfants.

2. Si un individu a 2 enfants, calculer la probabilité qu'il n'ait pas de petits-enfants.

3. En déduire la probabilité qu'un individu choisi au hasard n'ait pas de petits-enfants.

Solution.

1. Si un individu a un enfant, la probabilité qu'il n'ait pas de petits-enfants est égale à la probabilité que son unique enfant n'ait pas lui-même d'enfants i.e. $\frac{1}{3}$.

2. Si un individu a deux enfants, notons E_1 : « son premier enfant n'a pas d'enfants » et E_2 : « son second enfant n'a pas d'enfants ». Alors, la probabilité que cet individu n'ait pas de petits-enfants est $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$. Or, par hypothèse, E_1 et E_2 sont indépendants donc $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

3. Considérons les évènements A : « l'individu n'a pas d'enfant », B : « l'individu a 1 enfant » et C : « l'individu a 2 enfants » et D : « l'individu n'a pas de petits-enfants ». Comme (A, B, C) est un système complet d'évènements, d'après le formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D \mid A) + \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(D \mid B) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D \mid B).$$

Or, si un individu n'a pas d'enfants alors il n'a pas de petits enfants donc $\mathbf{P}(D \mid A) = 1$. On déduit alors des questions précédentes que

$$\mathbf{P}(D) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{14}{27}.$$

Exercice 25. Un boîte rectangulaire est séparée en deux compartiments appelés A et B. Une ouverture permet de passer d'un compartiment à l'autre. Un rat est placé dans le compartiment A à l'instant 0 de l'expérience et on observe sa position à chaque seconde suivante. La position du rat est aléatoire et, après observation, il semble que le compartiment dans lequel le rat se trouve à une seconde donnée influe sur celui dans lequel il sera à la seconde suivante :

— si le rat est en A, il a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'y rester et $\frac{2}{3}$ de passer en B ;

— si le rat est en B, il a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'y rester et $\frac{1}{2}$ de passer en A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les évènements suivants :

— A_n : « à la n-ième seconde, le rat se trouve dans le compartiment A »,

— B_n : « à la n-ième seconde, le rat se trouve dans le compartiment B »,

et on note $a_n = \mathbf{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbf{P}(B_n)$. On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

1. Calculer a_1 et b_1.

2. Déterminer $\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)$ et $\mathbf{P}(A_2 \mid B_1)$ puis en déduire a_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer $\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n)$ et $\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n)$.

b. À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire que $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

c. Démontrer de même que $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

a. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$.

c. Exprimer M en fonction de D, P et P^{-1}.

d. Démontrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. En utilisant les questions précédentes, déterminer des expressions de a_n et b_n en fonction de n.

Solution.

1. Comme l'évènement A_0 est un évènement certain, $A_1 = A_1 \cap A_0$ et, par conséquent, $a_1 = \mathbf{P}(A_1 \cap A_0) = \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(A_1 \mid A_0) = 1 \times \dfrac{1}{3}$ donc $a_1 = \dfrac{1}{3}$.

De même, $b_1 = \mathbf{P}(B_1 \cap A_0) = \mathbf{P}(A_0)\mathbf{P}(B_1 \mid A_0) = 1 \times \dfrac{2}{3}$ donc $b_1 = \dfrac{2}{3}$.

2. D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(A_2 \mid B_1) = \dfrac{1}{2}$. Étant donné que (A_1, B_1) est un système complet d'évènements, la formule de probabilités totales permet d'affirmer que

$$a_2 = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_2 \mid B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

i.e. $a_2 = \dfrac{4}{9}$.

3. **a.** Comme précédemment, $\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) = \dfrac{1}{2}$.

b. Étant donné que (A_n, B_n) est un système complet d'évènements, la formule de probabilités totales permet d'affirmer que

$$a_{n+1} = \mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{2}$$

donc $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$.

c. Par le même raisonnement,

$$b_{n+1} = \mathbf{P}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) = a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{2}$$

donc $b_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MX_n$$

en posant $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $X_n = M^nX_0$ ».

- **Initialisation.** $M^0X_0 = I_2X_0 = X_0$ donc H_0 est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Alors, grâce à la question précédente, $X_{n+1} = MX_n$ et, comme H_n est vraie, $X_n = M^nX_0$ donc $X_{n+1} = M(M^nX_0) = (MM^n)X_0 = M^{n+1}X_0$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^nX_0$.

5. **a.** $\det(P) = (-1)\times 4 - 1\times 3 = -7 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. On a

$$D = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ -\frac{1}{6} & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

donc $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Comme $D = P^{-1}MP$, $M = PDP^{-1}$.

d. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition Q_n : « $M^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation.** $M^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc Q_0 est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que Q_n est vraie. Alors, grâce à la question précédente, $M = PDP^{-1}$ et, comme Q_n est vraie, $M^n = PD^nP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= MM^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PDI_2D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc Q_{n+1} est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

6. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{6})^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{6})^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, grâce aux questions **4.b.** et **5.d.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n = PD^nP^{-1}X_0 &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-\frac{1}{6})^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-\frac{1}{6})^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4(-\frac{1}{6})^n \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4(-\frac{1}{6})^n + 3 \\ -4(-\frac{1}{6})^n + 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc on conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{7} \qquad \text{et} \qquad b_n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7}.$$