Exercice 1

Soit E un ensemble . A , B , C trois parties de E . Montrer les égalités suivantes :

1) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)-C$ 2) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

3) $(A-C)-(B-C)=(A-B)-C=A-(B\cup C)$

Exercice 2

Soit E un ensemble . A , B , C trois parties de E telles que $A\cup B=A\cup C$ *et* $A\cap B=A\cap C$

Montrer que : $B=C$.

Exercice 3

Soient A , B , C *trois parties d'un ensemble* E .

Montrer que : $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Exercice 4

Soit E un ensemble . pour tout $A,B\in P(E)$ *on pose* $(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)$

1) *Montrer que :* $A-B=A\cap\overline{B}$ *et en déduire que* $A\subset B\Leftrightarrow A-B=\phi$

2) *Montrer les égalités suivantes :* a) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$ b) $A\Delta B=\overline{A}\Delta\overline{B}$

c) $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$ d) $A-B=(A\cup B)\Delta B$

3) *Montrer que :* $A\Delta B=\phi\Leftrightarrow A=B$

Exercice 5

Soient A , B , C *trois parties d'un ensemble* E *telles que :* $B\subset A$ *et* $A\cap C=\phi$

Résoudre dans $P(E)$ *le système* $\begin{cases} A-X=B \\ X-A=C \end{cases}$

Exercice 6

Soient A , B , C *trois parties d'un ensemble* E . *Montrer ce qui suit :*

1) $\begin{cases} A\cup B\subset A\cup C \\ A\cap B\subset A\cap C \end{cases}\Rightarrow B\subset C$ 2) $\begin{cases} B\subset A \\ C=A-B \end{cases}\Rightarrow A=B\cup C$ 3) $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

Exercice 7

Soient Aune parties d'un ensemble E . *et on considère l'application* $\varphi_A : E\rightarrow\{0,1\}$, $x\mapsto\begin{cases} 1 \ ; \ x\in A \\ 0 \ ; \ x\notin A \end{cases}$

1) *qu'elle est la condition nécessaire et suffisante pour que* φ_A *soit surjective ?*

2) *Montrer que :* $A=B\Leftrightarrow\varphi_A=\varphi_B$

3) *Montrer que l'application* $\varphi : P(E)\rightarrow A(E,\{0,1\})$, $A\mapsto\varphi_A$ *est une bijection .*

4) *Montrer que :* a) $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\varphi_{A\cup B}=\varphi_A+\varphi_B$ b) $\varphi_{A\cap B}=\varphi_A.\varphi_B$

c) $\varphi_{A\cup B}=\varphi_A+\varphi_B-\varphi_A.\varphi_B$ d) $\varphi_{\overline{A}}=1-\varphi_A$

Exercice 8

Soit E un ensemble non vide , A une parties de E .

on pose $A^-=\{B\in P(E)/B\subset A\}$ *et* $A^+=\{B\in P(E)/A\subset B\}$

Montrer que l'application $f : P(E)\rightarrow A^-\times A^+$, $X\mapsto(X\cap A,X\cup A)$ *est bijective .*

Exercice 9

Soit $f : E\rightarrow F$ *une application . Montrer que :*

1) $(f \text{ injetive})\Leftrightarrow(\forall A\in P(E)):f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

2) $(f \text{ surjective})\Leftrightarrow(\forall A\in P(E)):\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$

Exercice 10

Soit $f : E \to F$ une application et A , $A' \subset E$ et B , $B' \subset F$

1) Montrer que $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$

2) Montrer que a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ b) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

3) Montrer que si f est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$

4) Montrer que a) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ b) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

5) Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

Exercice 11

Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$ et $B \subset F$

1) a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ b) Montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$

2) a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ b) Montrer que si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$

3) a) Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$ b) Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$

Exercice 12

Soit $f : E \to E$ une application et on considère les deux applications :

$$D : P(E) \to P(E) \quad \text{et} \quad R : P(E) \to P(E)$$
$$A \to f(A) \qquad\qquad A \to f^{-1}(A)$$

1) $(D \text{ injetive}) \Leftrightarrow (f \text{ injetive})$ 2) $(D \text{ surjetive}) \Leftrightarrow (f \text{ surjetive})$

1) $(R \text{ surjetive}) \Leftrightarrow (f \text{ injetive})$ 2) $(R \text{ injetive}) \Leftrightarrow (f \text{ surjetive})$

Exercice 13

Soient A une parties d'un ensemble non vide E . et on considère l'application

$$f : P(E) \to P(A) \times P(\bar{A})$$
$$X \to (A \setminus X, \bar{A} \setminus X)$$

1) Montrer que f est injective 2) Montrer que f est surjective 3) Déterminer f^{-1}

Exercice 14

Soient A une parties d'un ensemble non vide E . et on considère l'application

$$f : P(A) \times P(\bar{A}) \to P(E)$$
$$(X, Y) \to X \cup Y$$

1) Montrer que f est injective 2) Montrer que f est surjective 3) Déterminer f^{-1}

Exercice 15

Soit E un ensemble non vide , et $A \subset E$ tel que $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$.

on considère l'application

$$f : P(A) \times P(\bar{A}) \to P(E)$$
$$(X, Y) \to X \cup Y$$

1) a) Déterminer $f(\varnothing)$ et $f(E)$ et $f(A)$ b) f est-elle injective ?

2) a) Montrer que l'équation $A \cup X = \bar{A}$ n'a pas de solutions dans $P(E)$

b) f est-elle surjective ?

Exercice 16

Soit E un ensemble non vide , et A , $B \subset E$ telles que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$.

on considère l'application

$$f : P(E) \to P(A) \times P(B)$$
$$X \to (A \cap X, B \cap X)$$

1) a) Montrer que $(\forall X \in P(E)) : X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ b) Montrer que f est injective .

2) a) Montrer que $(\forall (X, Y) \in P(E) \times P(E)) : f(X \cup Y) = (X, Y)$

b) Montrer que f est surjective . c) Déterminer f^{-1} .

Exercice 17

On considère les applications $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$

1) Montrer que : a) $(g \circ f \text{ injective}) \Rightarrow (f \text{ injective})$ b) $(g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective})$

c) $(g \circ f \text{ injective et } f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ injective})$

d) $(g \circ f \text{ surjective et } g \text{ injective}) \Rightarrow (f \text{ surjective})$

e) $(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives}) \Rightarrow (f \text{ et } g \text{ et } h \text{ bijectives})$

Exercice 18

On considère l'application $\begin{array}{l} f : IR \to IR \\ x \to x^2 + x + 2 \end{array}$

1) a) Résoudre dans IR l'équation $f(x) = 2$ en déduire que l'application f n'est pas injective .

b) Montrer que $f(IR) = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$.

2) Montrer que l'application $\begin{array}{l} g : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[\\ x \to x^2 + x + 2 \end{array}$ est une bijection puis déterminer f^{-1} .

Exercice 19

On considère l'application $\begin{array}{l} f : IR - \{-1\} \to IR \\ x \to \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} \end{array}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in IR - \{-1\}$ $f(x) < 1$.

b) En déduire que f n'est pas surjective .

2) a) Montrer que que pour tout $x \in IR - \{-1\}$ $f(-x-2) = f(x)$

b) f est –elle injective ?

3)Montrer que l'application $\begin{array}{l} g : IR \to IR \\ x \to x^3 - 3x + 2 \end{array}$ n'est pas injective .

Exercice 20

Soit $a \in \left]-1, 1\right[$ et φ_a l'application définie par : $\begin{array}{l} \varphi_a : \left]-1,1\right[\to \left]-1,1\right[\\ x \mapsto \dfrac{x + a}{1 + ax} \end{array}$

1) Déterminer $\varphi_{-a} o \varphi_a$. 2) Montrer que φ_a est une bijection et déterminer φ_a^{-1} .

Exercice 21

Soit $f : IR \to IR$ une application telle que : $(\forall x \in IR) : (f \circ f)(x) = 4x - 9$

1) Calculer $f(3)$

2) a) Montrer que f est injective b) Montrer que f est surjective

c) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 22

On considère l'application $f : IR \to IR$ définie par $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 , & x \le 0 \\ -\sqrt{x} + 1 , & x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer $f \circ f(x)$.

2) Montrer que f est une bijection de IR dans IR puis Calculer $f^{-1}(x)$

3) On considère l'application $g : IR \to IR$ définie par $g(x) = x^2 + 2x$. Déterminer $f \circ g(x)$

Exercice 23

Soit $\alpha \in IR$ tel que $\alpha > 1$.

montrer l'application $\begin{array}{l} \varphi_\alpha : IN^* \to IN^* \\ n \mapsto E(n\alpha) \end{array}$ est injective .

Exercice 24

montrer l'application $f: \; IN \times IN \to IN^*$, $(m,n) \mapsto (2m+1)2^n$ *est injective puis surjective*

Exercice 25

Soit $f : E \to E$ *une application telle que* $(\forall x \in E)(\exists n \in IN^*) : f^n(x) = x$

(*avec* $f^n = \underbrace{fof....f}_{n\ fois}$) *Montrer que f est injective .*

Exercice 26

Soit $f : IR \to IR$ *une application telle que* $(\forall (x,y) \in IR^2) : |f(x) - f(y)| = |x - y|$

1) Montrer que f est injective

2) on suppose que f vérifie $(\forall x \in IR) : (f \circ f)(x) = x + 2$ *. calculer* $f(x)$ *pour tout* $x \in IR$ *.*

Exercice 27

Déterminer toutes les applications $f : IR \to IR$ *vérifiant :*

$$(\forall (x,y) \in IR^2) : f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Exercice 28

Déterminer toutes les applications $f : IR^* - \{1\} \to IR$ *vérifiant :*

$$(\forall x \in IR^* - \{1\}) : f(\frac{x-1}{x}) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$$

Exercice 29

Soit $f : IN^* \to IN$ *une application telle que*

$f(1) = 4$ *et* $(\forall n \in IN^*) : f(n+1) = \frac{1}{2}f(n) + \frac{3}{2}$ *et on pose* $g(n) = f(n) - 3$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; g(n+1) = \frac{1}{2}g(n)$ *2) en déduire que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : g(n) = (\frac{1}{2})^{n-1}$

3) déduire $f(n)$ *en fonction de n .*