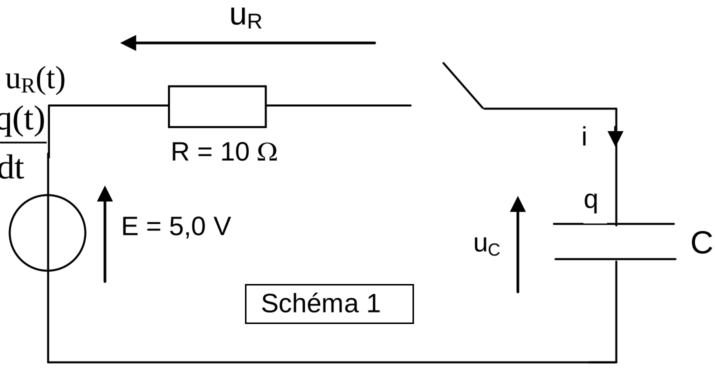
Pondichéry 2007 EXERCICE II. ETUDE D'UN "SUPER CONDENSATEUR" (5 points)
Correction http://labolycee.org ©

II.1.a –



La loi d'additivité des tensions nous donne : $E = u_C(t) + u_R(t)$

D'après la loi d'Ohm $u_R(t) = R.i(t)$, d'autre part $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$

donc $u_R(t) = R.\dfrac{dq(t)}{dt}$

De plus $q(t) = C.u_C(t)$ et C est une constante

donc $u_R(t) = R.C.\dfrac{du_C(t)}{dt}$.

(0,5) Il vient : $E = u_C(t) + R.C.\dfrac{du_C(t)}{dt}$ équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.

II.1.b.*(0,25)* Si $u_c(t) = E.(1 - e^{-t/\tau})$, on a : $\dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{d(E.(1-e^{-\frac{t}{\tau}}))}{dt} = E.\dfrac{d(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} = \dfrac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

En remplaçant dans l'équation précédente, il vient :

$u_C(t) + R.C.\dfrac{du_C(t)}{dt} = E.(1 - e^{-t/\tau}) + R.C.\dfrac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = E - E.\ e^{-t/\tau} + R.C.\dfrac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_C(t) + R.C.\dfrac{du_C(t)}{dt} = E\ (1 - e^{-t/\tau} + \dfrac{R.C}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}) = E.(1 - e^{-t/\tau}(1 - \dfrac{R.C}{\tau}))$

Pour que $u_c(t) = E.(1 - e^{-t/\tau})$ soit solution de l'équation différentielle, il faut que $(1 - \dfrac{R.C}{\tau}) = 0$,

soit : ***(0,25)*** $\tau = R.C$

(0,25) Condition initiale, à t = 0, $u_c(0) = 0$

$u_C(0) = E.(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}) = E.(1 - 1) = 0$ cette condition est vérifiée.

II.1.c.*(0,5)* $\tau = R.C$ donc **C** $= \dfrac{\tau}{R}$.

Déterminons graphiquement la valeur de la constante de temps τ.

Pour t = τ, $u_C(\tau) = E.(1 - e^{-\tau/\tau}) = E.(1 - e^{-1})$

$u_C(\tau) = 0,63.E$

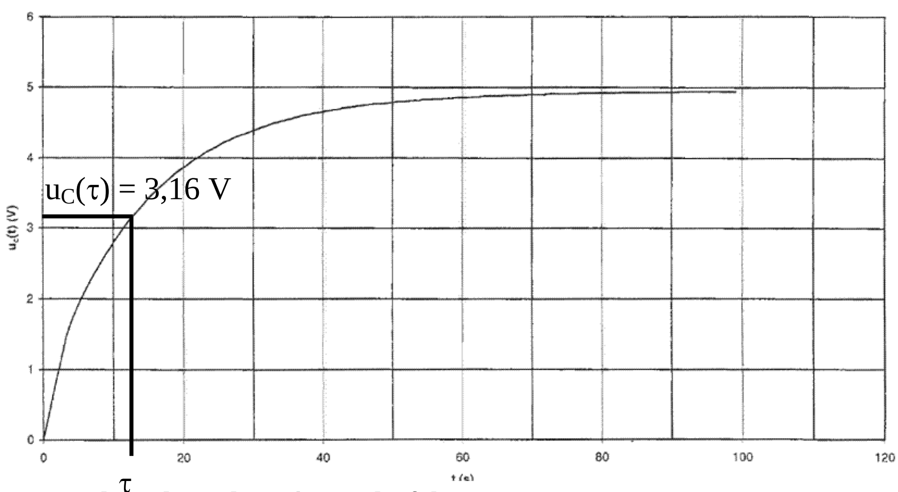
$u_C(\tau) = 0,63 \times 5,0 = 3,16$ V = **3,2 V**.

On trace la droite horizontale $u_C = 3,2$ V qui coupe la courbe $u_C(t)$ en un point dont l'abscisse t est égale à τ.

Graphiquement **τ = 12 s.**

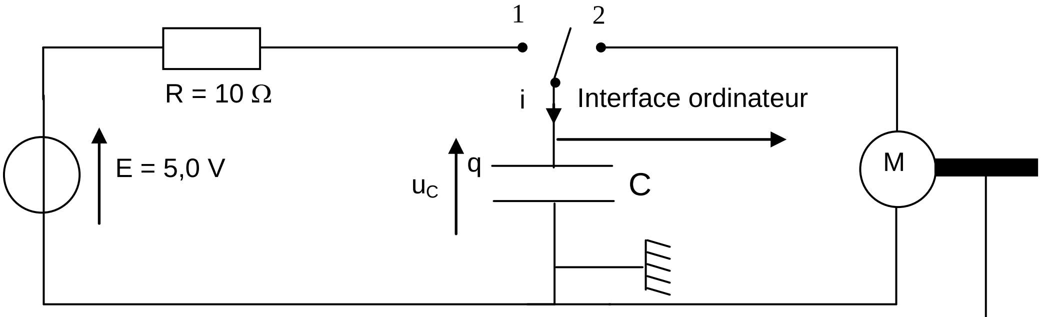
Donc **C** $= \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{12}{10} =$ **1,2 F**.

Le constructeur indique la valeur de C avec seulement un chiffre significatif : C = 1 F.



On obtient un écart relatif d'environ **20 %** avec la valeur donnée par le fabricant.
Notre résultat est compatible avec l'indication du fabricant.

II.2.- Restitution de l'énergie et décharge à courant constant. Schéma 2



II.2.a. On a: $u_C(t) = a.t + b$, avec $a < 0$ et $b > 0$

(0,25) Or $u_c(0) = 4{,}9$ V donc $\mathbf{b = 4{,}9\ V}$

(0,25) Et $u_c(18) = 1{,}5$ V donc $1{,}5 = a.18 + 4{,}9$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a} = \dfrac{1{,}5 - 4{,}9}{18} = \mathbf{-\ 0{,}19\ V.s^{-1}}$

Finalement: $\mathbf{u_C(t) = -\ 0{,}19.t + 4{,}9}$

Il.2.b. On a $q(t) = C\ .\ u_C(t)$

$q(t) = C.(a.t+b)$

$q(t) = \mathbf{C.a.t + C.b}$

(0,5) $q(t) = 1{,}0 \times -\ 0{,}19.t + 1{,}0 \times 4{,}9 = \mathbf{-\ 0{,}19.t + 4{,}9}$

(0,25) Or $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = C.a$ avec $a < 0$ donc $i(t)$ est négative et constante on a $\mathbf{i(t) = -\ 0{,}19\ A}$

(0,5) Lorsque K bascule en 2, le condensateur se décharge alors q diminue donc $dq < 0$ et le signe de l'intensité est négatif.

Lors de la décharge, le sens réel du courant est le sens opposé de celui indiqué sur le schéma.

II.2.c –

- énergie stockée dans le condensateur à t = 0 s :

$$E_C(0) = \frac{1}{2}.C.u_C(0)^2$$

(0,25) $E_C(0) = 0{,}5 \times 1{,}0 \times 4{,}9^2 = \mathbf{12\ J}$

- énergie restant à t = 18 s :

$$E_C(18) = \frac{1}{2}.C.u_C(18)^2$$

(0,25) $E_C(18) = 0{,}5 \times 1{,}0 \times 1{,}5^2 = \mathbf{1{,}1\ J}$

- énergie cédée par le condensateur entre t = 0 s et t = 18 s :

$$E_C(0) - E_C(18) = \frac{1}{2}.C.u_C(0)^2 - \frac{1}{2}.C.u_C(18)^2 = \frac{1}{2}.C.(\ u_C(0)^2 - u_C(18)^2)$$

(0,25) $E_C(0) - E_C(18) = 0{,}5 \times 1{,}0 \times (4{,}9^2 - 1{,}5^2) = 10{,}88$ J soit avec deux chiffres significatifs, une perte d'énergie d'environ **11 J**.

- énergie mécanique (potentielle de pesanteur) reçue par la masse marquée :

$$E_{PP} = m.g.h$$

(0,25) $E_{PP} = 0{,}100 \times 9{,}8 \times 3{,}10 = \mathbf{3{,}0\ J}$

- rendement du dispositif (en pourcentage) : $\eta = \dfrac{E_{\text{"utile"}}}{E_{\text{"dépensée"}}} = \dfrac{E_{PP}}{E_C(0) - E_C(18)}$

(0,5) $\eta = \dfrac{3{,}038}{10{,}88} = 0{,}28 = \mathbf{28\ \%}$.